МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СВЕРДЛОВСКОЙ ОБЛАСТИ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ СВЕРДЛОВСКОЙ ОБЛАСТИ «КАМЫШЛОВСКИЙ ТЕХНИКУМ ПРОМЫШЛЕННОСТИ И ТРАНСПОРТА»

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ К ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ ЕН 01 «МАТЕМАТИКА»

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ.

для специальности среднего профессионального образования

38.02.04. Коммерция (по отраслям)

Составил:
преподаватель математика
Зуева О.С.

Камышлов
2015

АННОТАЦИЯ

Методическое пособие к выполнению самостоятельных работ по учебной дисциплине «Математика» предназначены для студентов специальности среднего профессионального образования 13.02.11. Техническая эксплуатация и обслуживание электрического и электромеханического оборудования (по отраслям)

Пособие соответствует государственному образовательному стандарту учебной дисциплины «Математика», оно содержит рекомендации для студентов по теме «Элементы комбинаторики. Элементы теории вероятности. Элементы математической статистики».

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по данной специальности.
В пособии рассматриваются примеры решения по данной теме, знание которых необходимо для дальнейшего успешного усвоения программного материала.
По каждому вопросу кратко излагаются теоретические основы, приводятся примеры решения стандартных задач, предлагаются индивидуальные задания для самостоятельной работы.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие содержит указания по выполнению внеаудиторных самостоятельных работ по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика», являющейся естественно - научной дисциплиной.

Каждый пункт содержит необходимые теоретические сведения, примеры с решениями, задания для самостоятельной работы, чтобы студенты имели представление об уровне стандартных требований.

Заканчивается каждый пункт вариантом самостоятельного задания.
Значительную часть заданий подробно рассматривать на уроках. После коллективного решения студентам предлагается выполнить самостоятельно некоторые задания с тем, чтобы студенты сами поняли, какие вопросы вызывают затруднения . Итогом работы будет выполнение студентами индивидуальных заданий , которые обязательны для всех. Решения записываются в рабочую тетрадь , сдаются на проверку, оценки ставятся в журнал.

1. Цели и задачи самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа студентов является необходимым компонентом процесса обучения и может быть определена как творческая деятельность студентов, направленная на приобретение ими новых знаний и навыков.

Цель самостоятельной работы студентов – систематическое изучение дисциплин в течение семестра, закрепление и углубление полученных знаний и навыков, подготовка к предстоящим занятиям, а также формирование культуры умственного труда и самостоятельности в поиске и приобретении новых знаний и умений, и, в том числе, формирование компетенций.

Самостоятельная работа студентов способствует развитию ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального (в том числе научного) уровня.

Процесс организации самостоятельной работы студентов включает в себя следующие *этапы*.

1. Подготовительный этап включает определение целей, задач, составление программы (плана) с указанием видов работы, её сроков, результатов и форм контроля, подготовку методического обеспечения, согласование самостоятельной работы с преподавателем.

2. Основной этап состоит в реализации программы (плана) самостоятельной работы, использовании приемов поиска информации, усвоении, переработке, применении и передаче знаний, фиксировании результатов работы. На основном этапе студент может получить консультации и рекомендации у преподавателя, руководящего его самостоятельной работой.

3. Заключительный этап означает анализ результатов и их систематизацию, оценку продуктивности и эффективности проделанной работы, формулирование выводов о дальнейших направлениях работы.

2. Содержание самостоятельной работы студентов

Содержание самостоятельной работы носит двусторонний характер:

- с одной стороны это способ деятельности студентов во всех организационных формах учебных занятий и во внеаудиторное время, когда они самостоятельно изучают материал, определенный содержанием рабочей программы по учебной дисциплине;
- с другой стороны – это вся совокупность учебных заданий, которые должен выполнить студент во время обучения: например, написать реферат, выполнить контрольную работу.

Кроме того, в современных условиях самостоятельная работа рассматривается как работа студента под руководством преподавателя для получения новых знаний. Обучая студента самостоятельно работать (научить учиться) преподаватель формирует у будущего специалиста умение учиться на протяжении всей его профессиональной деятельности. С позиции обеспечения качества подготовки специалиста это важнейший момент, так как постоянно возрастающий объем информации приводит к тому, что устаревание знаний специалиста – так называемый период полураспада компетентности (период снижения компетентности на 50 %) происходит очень быстро. Как отмечают исследователи, по многим специальностям этот период менее 5 лет.

Поэтому специалист вынужден на протяжении всей жизни прилагать усилия для поддержания необходимого уровня компетентности, т.е. самостоятельно работать над получением новых знаний.

3. Виды самостоятельной работы студентов

Основными видами самостоятельной учебной деятельности студентов учебного заведения являются:

1) предварительная подготовка к аудиторным занятиям, в том числе и к тем, на которых будет изучаться новый, незнакомый материал. Такая подготовка предполагает изучение учебной программы, установление связи с ранее полученными знаниями, выделение наиболее значимых и актуальных проблем, на изучении которых следует обратить особое внимание и др.;

2) самостоятельная работа при прослушивании лекций, осмысление учебной информации, сообщаемой преподавателем, ее обобщение и краткая запись, а также своевременная доработка конспектов лекций;

3) подбор, изучение, анализ и при необходимости – конспектирование рекомендованных источников по учебным дисциплинам;

4) выяснение наиболее сложных, непонятных вопросов и их уточнение во время консультаций;

5) подготовка к контрольным занятиям, зачетам и экзаменам;

6) выполнение специальных учебных заданий, предусмотренных учебной программой;

7) выполнение контрольных работ.

Традиционно по своему характеру все многообразие учебной деятельности студентов объединяют в три группы.

1. Репродуктивная учебная деятельность:

- самостоятельное прочтение, просмотр, конспектирование учебной литературы,
- прослушивание лекций, заучивание, пересказ, запоминание, повторение учебного материала.

2. Познавательно-поисковая учебная деятельность:

- подготовка сообщений,
- подбор литературы по учебной проблеме,
- написание контрольной работы.

3. Творческая учебная деятельность:

- написание рефератов, выполнение специальных творческих заданий и др.

Указанные виды самостоятельной работы осуществляются всеми студентами, независимо от специальности.

Все виды самостоятельной работы по дисциплине могут быть разделены на основные и дополнительные. Основные виды самостоятельной работы выполняются в обязательном порядке с последующим контролем результатов преподавателем. Дополнительные виды самостоятельной работы по дисциплине рекомендуются тем студентам, которые наиболее заинтересованы в изучении.

К *основным (обязательным) видам* самостоятельной работы студентов при изучении дисциплины относится:

а) самостоятельное изучение теоретического материала,

б) решение задач к занятиям,

в) выполнение письменных заданий к занятиям,

Дополнительными видами самостоятельной работы являются:

а) подготовка докладов и сообщений для выступления;

Данные виды самостоятельной работы не являются обязательными при изучении дисциплины и выполняются студентами по собственной инициативе с предварительным согласованием с преподавателем.

4. Оценка самостоятельной работы студентов

Отдельной составляющей в итоговой оценке по предмету оценка самостоятельной работы не является.

Независимо от вида самостоятельной работы, критериями оценки самостоятельной работы могут считаться:

а) положительное собственное отношение, заинтересованность в предмете;

б) умение применять свои знания для ответа на вопросы.

Формы проведения контроля определяются преподавателем. К ним относятся:

- собеседование;
- устный опрос;
- контрольная работа;
- проверка индивидуальных заданий;
- компьютерное тестирование;
- зачет по теме (разделу).

5. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

В связи с рекомендациями по увеличению доли самостоятельной работы в учебном процессе возрастает роль учебно-методических материалов. Они должны выполнять следующие функции:

- **информационную** (содержание теоретических данных по дисциплине, разделу, теме);
- **управляющую** (обеспечение рационального расходования времени для усвоения учебного материала);
- **организационно-контролирующую** (рекомендации порядка изучения учебной дисциплины, наличие вопросов для самоконтроля, обучающих программ, программ для тренинга, графика текущего контроля).

Основное назначение методических указаний – показать каждому студенту возможность перейти от деятельности, выполняемой под руководством преподавателя к деятельности, организуемой самостоятельно.

Раздел 1. Основные понятия комбинаторики

Тема 1.1. Основные понятия комбинаторики

Цель: получить навыки по расчету количества выборок заданного типа в заданных условиях; получить представление о применении комбинаторики в различных областях науки

Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа, работа с литературой

Форма контроля: проверка работы, сообщение на уроке

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

Элементы комбинаторики

План:

1. Принцип умножения
2. Размещения (упорядоченные выборки).
3. Перестановки
4. Сочетания (неупорядоченные выборки)

1. Принцип умножения

Пусть необходимо выполнить одно за другим одновременно r действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, после чего второе - n_2 способами и т.д. до r - того действия, которое можно выполнить n_r способами, то все r действий вместе можно выполнить $n_1, n_2 \ldots n_r$ способами.

<u>**Пример**</u>: Сколько существует двузначных чисел?

<u>**Способ**</u> **1**: (принцип умножения)

Выбирается две цифры, поэтому r= 2. Первая цифра может быть любой, кроме 0. Потому $n_1= 9$. Вторая цифра может быть любой, т.е. $n_2=10$. итак двузначных чисел: $n_1n_2=9 \cdot 10=90$.

<u>**Способ**</u> **2**. (перобора)

10 20 30 ………..90

11 21 31 …………91 прямоугольная таблица $10 \cdot 9=90$

12 22 32 …………92

………………………….

19 29 39 ………...99

<u>**Пример:**</u> Бросают три игральные кости и наблюдают за числом очков, появившихся на каждой кости. Сколько различных исходов опыта возможно?

<u>**Решение**</u>: Бросают три игральные кости, поэтому по принципу умножения r= 3, На выпавшей грани "первой" игральной кости может появиться одно очко, два очка, ... шесть очков. Поэтому $n_1= 6$. Аналогично $n_2= 6$, $n_3= 6$. Итак, число всех исходов опыта $n_1n_2n_3= 6 \cdot 6 \cdot 6=216$.

<u>**Пример**</u>: Сколько существует нечетных трехзначных чисел?

<u>**Решение**</u>: По принципу умножения $r = 3$; $n_1 = 9$, т.к. первая цифра может быть любой, кроме 0; $n_2 = 10$, т. к. вторая цифра может быть любой ; $n_3 = 5$, т.к. третья цифра должна быть нечетной. Итак, всех возможностей

$n_1n_2n_3 =9 \cdot 10 \cdot 5=450$.

<u>**Пример**</u>: В машине 7 мест, одно место водителя. Сколькими способами могут сесть в машину 7 человек, если место водителя могут занять только трое из них?

<u>**Решение**</u>: По принципу умножения r = 7. Начнем с места водителя $n_1 = 3$, следующее место может занять любой из 6 оставшихся человек, т.е. $n_2 = 6$, следующее место может занять любой из 5 оставшихся человек и т.д. Поэтому $n_3 = 5$, $n_4 = 4$, $n_5 = 3$, $n_6= 2$, $n_7 = 1$.

Итак, всех возможностей: $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 \cdot n_6 \cdot n_7 =3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2160$.

2. Размещения (упорядоченные выборки).

Пусть A – множество, состоящее из элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Определение: Упорядоченные наборы, состоящие из r элементов множество A, будем называть размещениями из n элементов множества A по r элементов.

A_n^r – число размещений из n элементов по r элементов($r \le n$). Вычислим A_n^r по принципу умножения:

$n_1 = n$,

$n_2 = n-1$, $A_n^r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$.

$n_3 = n-2$,

…………

$n_r = n-(r-1) = n-r+1$.

Здесь n, n-1, n-2,…,n-r+1 есть число возможностей для выбора первого, второго, третьего,… r – того элементов.

$$A_n^r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)(n-r)\dots2\cdot1}{(n-r)\dots2\cdot1} = \frac{n!}{(n-r)!},$$

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

3. Перестановки

Определение: Размещения из n элементов по n элементов называются перестановки из n элементов.

P_n – число перестановок из n элементов.

$$P_n = A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n!}{0!} = n!, \qquad P_n = n!$$

Пример: Сколькими способами могут 4 человека разместиться в 4-х местном купе железнодорожного вагона?

Решение: A = {1, 2, 3, 4} (4 места в купе вагона);

$P_4 = 4! = 1\cdot2\cdot3\cdot4 = 24$.

4. Сочетания (неупорядоченные выборки)

$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots a_n\}$

Определение: Неупорядоченные наборы, состоящие из r элементов множества A, называются сочетаниями из n элементов по r элементов. ($r \le n$).

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{P_r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}, \quad \text{или} \quad C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Пример: Студенту необходимо сдать 4 экзамена за 10 дней. Сколькими способами можно составить ему расписание, если в один день нельзя сдать более одного экзамена?

Решение: A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} (10 дней). Поскольку в расписании учитывается порядок экзаменов, то мы имеем дело с упорядоченными выборками, т.е. с размещениями.

Пример: Подрядчику нужны 4 плотника, к нему с предложениями своих услуг обратилось 10 человек. Сколькими способами можно набрать рабочую силу?

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} (плотники).

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 210.$$

Пример. В розыгрыше первенства по футболу участвуют 10 команд. Известно, что те, кто займет первые 3 места, получают золотую, серебряную и бронзовую медали, а последние двое выбывают. Сколько различных результатов первенства может быть?

Решение: Нужно выполнить одно за другими два действия:

I. Из десяти команд выбрать три на три первых места.

II. После выполнения первого действия из оставшихся семи команд выбрать две на два последних места.

Итак, по принципу умножения $r = 2$;

$n_1 = A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$; $\quad n_2 = C_7^2 = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 21$.

Различных результатов первенства может быть:

$n_1 n_2 = 720 \cdot 21 = 15120$.

Задачи на расчет количества выборок

На использование формул для перестановок и размещений

1. Сколько слов можно образовать из букв слова **фрагмент,** если слова должны состоять:
(а) из восьми букв, (б) из семи букв, (в) из трех букв?

Решение задачи:

В слове **фрагмент** 8 букв алфавита.

(а) Всевозможные перестановки 8 букв по восьми местам: $\boldsymbol{A}_8^8 = \frac{8!}{(8-8)!} = \frac{8!}{0!} = \frac{8!}{1} = 8! = P_8$.

(б) Размещения 8 букв по 7 местам: $\boldsymbol{A}_8^7$.

(в) Размещения 8 букв по 3 местам: $\boldsymbol{A}_8^3$.

Ответ: $\boldsymbol{P_8}$, $\boldsymbol{A}_8^7$, $\boldsymbol{A}_8^3$.

2. Сколькими способами можно расставить на полке 7 книг, если (а) две определенные книги должны всегда стоять рядом, (б) эти две книги не должны стоять рядом?

Решение задачи:

(а) Книги, которые должны стоять рядом, считаем за одну книгу. Тогда нужно расставить 6 книг по шести местам. Применяя формулу перестановок, получаем: $P_6 = 6!$. Мы учли перестановки шести книг, не учитывая порядок внутри тех книг, которые мы посчитали за одну. А так как две книги по двум местам можно разместить только двумя способами (P_2), то получаем окончательно следующее произведение: $P_2 \times P_6 = 2 \times 6! = 1440$.

(б) Способов переставить 7 книг существует $P_7 = 7!$. Из них - $2 \times 6!$ способов поставить определенные книги вместе. Следовательно, способов поставить книги так, чтобы 2 заданные книги не стояли вместе существует: $7! - 2 \times 6!$.

Ответ: 1440; . $7! - 2 \times 6!$

На использование формул для сочетаний

1. Сколькими способами из восьми человек можно избрать комиссию, состоящую из пяти членов?

Решение задачи:

Для решения этой задачи необходимо использовать формулу для сочетания элементов, т.к. здесь не имеет значения порядок элементов в выборке. Запишем формулу для сочетаний и произведем вычисления:

$$\mathbf{C}_8^5 = \frac{8!}{(8-5)! \times 5!} = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3} = 8 \times 7 = 56.$$

Ответ: 56.

На использование формул для перестановок и сочетаний

1. Сколько четырехбуквенных слов можно образовать из букв слова ***сапфир****?* 2) Сколько среди них таких, которые не содержат буквы ***р***? 3) Сколько таких, которые начинаются с буквы ***с*** и оканчиваются буквой ***р****?*

Решение задачи:

1. Из шести букв составляются четырехбуквенные слова, причем порядок букв важен для образования новых слов. Поэтому используется формула для размещений: $\mathbf{A}_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2!}{2!} = 6\times5\times4\times3 = 360$.
2. Необходимо исключить букву **р** из рассмотрения. Количество слов, не содержащих эту букву: $\mathbf{A}_5^4 = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = 120$.
3. На первое место поставить букву **с** можно только одним способом. На последнее место поставить букву **р** можно тоже только одним способом. Остаются 4 буквы, которые необходимо разместить по двум местам: $\mathbf{A}_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4\times3\times2!}{2!} = 12$.

Ответ: 360, 120, 12.

2. Сколько пятибуквенных слов, каждое из которых состоит из трех согласных и двух гласных, можно. образовать из букв слова ***уравнение****?*

Решение задачи:

В слове **уравнение** 3 согласных и 4 гласных буквы русского алфавита. Чтобы посчитать количество требуемых пятибуквенных слов, необходимо посчитать количество сочетаний 3 согласных из 3-х заданных и двух гласных из четырех заданных: $\boldsymbol{C}_3^3$ и $\boldsymbol{C}_4^2$. После того, как 5 букв выбраны, необходимо посчитать все возможные перестановки этих букв: $\boldsymbol{C}_3^3 \times \boldsymbol{C}_4^2 \times \boldsymbol{P}_5$.

Ответ: $\boldsymbol{C}_3^3 \times \boldsymbol{C}_4^2 \times \boldsymbol{P}_5$.

Самостоятельная работа: Подготовка сообщения «Возникновение теории вероятностей»

Цель: получить представление о возникновении теории вероятностей

Самостоятельная работа: работа с литературой

Форма контроля: сообщение на уроке

Раздел 2. Основы теории вероятностей

Тема 2.1. Основные теоремы теории вероятностей

Вычисление вероятностей событий по классической формуле определения вероятности

Цель: отработать навыки по вычислению вероятностей событий по классической формуле определения вероятности

Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа

Форма контроля: проверка работы

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

Классическое определение вероятности

Пусть некоторый опыт может приводить лишь к одному из конечного множества результатов. Эти результаты будем называть элементарными исходами. Предположим, что элементарные исходы удовлетворяют следующим условиям:

1) образуют полную группу, т.е. в каждом испытании обязан появиться какой-нибудь из этих исходов;
2) попарно несовместны, т.е. два различных элементарных исхода не могут появиться в одном испытании;
3) равновозможные, т.е. шансы на появление у всех элементарных исходов одинаковы.

В этих условиях может использоваться классическое определение вероятности.

Определение: Элементарные исходы, в которых появляются интересующее нас событие, называются ***благоприятными*** этому событию.

Определение: ***Вероятностью события А*** называются число Р(А), равное отношению числа исходов испытания, благоприятствующих событию А к общему числу исходов: $P(A) = \frac{m}{n}$, где n – общее число исходов испытания, m – число исходов, благоприятствующих событию А.

Пример: Бросается один раз игральная кость. Какова вероятность выпадения нечетного числа очков?

Решение: Опыт состоит в бросании игральной кости 1 раз и наблюдении за числом очков, появившихся на верхней грани.

Все исходы опыта: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Число всех исходов: n = 6.

Рассмотрим событие А – выпало нечетное число очков. Исходы благоприятствующие А: 1, 3, 5.

Число исходов, благоприятствующих А : m = 3

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Пример: Ребенок играет с шестью буквами разрезной азбуки А, В, К, М, О, С. Какова вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд получится слово «МОСКВА»?

Решение: Опыт состоит в случайном расположении шести букв в ряд. Все исходы опыта – множество перестановок из шести различных букв.

Число всех исходов: $n = P_6 = 6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720$.

Рассмотрим событие А – при случайном расположении шести букв в ряд получено слово «МОСКВА». Очевидно, что такое расположение букв единственно, т.е. m=1. Найдем вероятность события А: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{720}$.

Пример: В ящике находится 20 деталей, из них 8 бракованных. Из ящика наудачу извлекают 5 деталей. Найти вероятность того, что среди них окажутся две бракованные детали.

Решение: Опыт состоит в выборе наудачу 5 деталей из 20. Все исходы опыта – множество сочетаний из 20 деталей (находящихся в ящике) по 5.

Число всех исходов опыта n= $C_{20}^{5} = \frac{20!}{5!\cdot 15!}$

Рассмотрим событие А – среди 5 деталей, извлеченных из ящика, две бракованные.

Если среди 5 деталей две бракованные, то остальные 3 небракованные. Тогда число исходов, благоприятствующих

событию А, можно найти по принципу умножения. Нужно выполнить одно за другим два действия: из 8 бракованных выбрать 2 детали и затем из 12 небракованных выбрать 3 детали. Первое действие можно выполнить $n_1=C_8^2$ второе действие можно выполнить $n_2=C_{12}^3$ способами. Итак, $m=n_1 \cdot n_2=C_8^2\ C_{12}^3$.

Найдем вероятность события А:

$$P(A) = \frac{C_8^2 \cdot C_{12}^3}{C_{20}^5} = \frac{\frac{8!}{2!\cdot 6!}\cdot\frac{12!}{3!\cdot 9!}}{\frac{20!}{5!\cdot 15!}} \approx 0{,}397$$

Задачи на классическое определение вероятности

Буквой *А* обозначаем событие, фигурирующее в условии задачи.

Задача. Корреспонденция разносится в *5* адресов. Разносчик забыл дома очки и разнес корреспонденцию случайным образом. Какова вероятность того, что вся корреспонденция попала к своим адресатам?

Решение. Элементарным событием является перестановка из *5* адресов. Их число равно P_5. По смыслу задачи все они равновероятны. Поэтому *P(A)= 1/120.*

Задача. Цифры *0,1,2,3* написаны на четырех карточках. Карточки расположили в случайном порядке. Какова вероятность того, что из них сложено 4-х-значное число?

Решение. Элементарным событием является перестановка из 4 карточек. Их всего 4!. Поскольку четырехзначное число не может начинаться с нуля, то событие *А* состоит из тех перестановок, которые начинаются с карточки с не равной нулю цифрой. Их всего *4!-3!=18*. Поэтому *P*(*А*)= *18/4! =18/24=3/4.*

Задача. В хоккейном турнире участвуют 6 равных по силе команд. Каждая команда должна сыграть с каждой одну игру. У Вас есть любимая команда. Вы пришли «поболеть» на турнир на одну из игр, выбранных случайно. Какова вероятность того, что в этой игре будет играть Ваша любимая команда?

Решение. Общее число проведенных игр равно $C_6^2=15$. Любимая команда участвует в *5* играх из *15*. Поэтому *P(A)= 5/15 = 1/3.*

Задача. В ящике разложено *20* деталей. Известно, что *5* из них являются стандартными. Рабочий случайным образом берет *3* детали. Какова вероятность того, что хотя бы одна деталь стандартная?

Решение. Элементарным событием является сочетание из *20* деталей по *3*. Количество таких сочетаний равно C_{20}^3. В соответствии с решением задачи *11*, число сочетаний, содержащих хотя бы одну стандартную деталь равно $C_{20}^3 - C_{15}^3=685$. Поэтому *P(A)=* $\frac{685}{C_{20}^3} = \frac{137}{228}$.

Задача. Из *7* карточек разрезной азбуки составлено слово *колокол*. Эти карточки рассыпали и затем собрали в случайном порядке. Какова вероятность того, что снова получится слово *колокол***?**

Решение. На карточках имеется *3* буквы *о, 2* буквы *к, 2* буквы *л*. Поэтому, первая буква слова *колокол* может быть выбрана двумя способами, вторая – 3 способами, третья – 2 способами. При уже выбранных первых трех буквах четвертая буква может быть выбрана еще 2 способами (поскольку одна буква *о* уже выбрана). Остальные буквы могут быть выбраны только одним способом. Таким образом (см. решение задачи 12), число перестановок карточек, реализующих слово *колокол* равно произведению чисел *3, 2, 2, 2* т.е. равен *24*. Общее число перестановок карточек равно *7!*.Поэтому *P(A)=* $\frac{24}{7!}$.

<u>Нахождение условных вероятностей. Вычисление вероятностей сложных событий с помощью теорем умножения и сложения вероятностей</u>

Цель: получить навыки по нахождению условных вероятностей; вычислению вероятностей сложных событий с помощью теорем умножения и сложения вероятностей

Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа

Форма контроля: проверка работы

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

Противоположное событие. Теоремы сложения, умножения вероятностей

План:

1. **Основные определения**
2. Теорема умножения вероятностей
3. Теорема сложения вероятностей несовместимых событий
4. Вероятность противоположного события

1. Основные определения

<u>Определение</u>: Событие, которое в результате опыта должно произойти непременно, называется ***достоверным*** событием.

<u>Определение</u>: Событие, которое в данном опыте не может произойти, называется ***невозможным***.

Вероятность достоверного события равна единице, вероятность невозможного события равна нулю.

<u>Определение</u>: Два события называют ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании.

<u>Определение</u>: ***Суммой А+В*** двух событий А и В называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из них, т. е. или событие А или В или А и В вместе.

<u>Определение</u>: ***Произведением А·В*** двух событий А и В называется событие, состоящее в совместном появлении события А и события В.

<u>Определение</u>: ***Противоположным*** к А называется событие $\bar{A}$, состоящее в том, что А не произошло.

<u>Определение</u>: Два события называются ***независимыми***, если вероятность одного из них не зависит от появления или не появления другого.

<u>Определение</u>: Пусть А и В – зависимые события. ***Условной вероятностью P(B|A) (или $P_A(B)$)*** называют вероятность события В, вычисленную в предположении, что событие А уже наступило.

2. Теорема умножения вероятностей

<u>Теорема</u>: Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

<u>Пример</u> . Какова вероятность того, что при десятикратном бросании монеты герб выпадет 10 раз ?

<u>Решение:</u> Пусть событие *Ai* — появление герба при *i*-м бросании. Искомая вероятность есть вероятность совмещения всех событий *Ai (i=1,2,3,...,10)*, а так как они, очевидно, независимы в совокупности, то применяя формулу (10), имеем $P(A_1A_2 \ldots A_{10}) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_{10})$

Но *P(Ai)=1/2* для любого *i*; поэтому $$P(A_1A_2 \ldots A_{10}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024} \approx 0{,}001$$

<u>Теорема</u>: Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятностей одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предложении, что первое уже наступило.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B \mid A).$$

Для трех зависимых событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P(C \mid A \cdot B).$$

<u>Пример</u>. Из урны, содержащей 3 белых и 7 черных шаров, вынимают два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми ?

<u>Решение</u>: Эта задача уже была решена в п. 3 с помощью классического определения вероятности. Решим ее, применяя формулу (5). Извлечение двух шаров равносильно последовательному их извлечению. Обозначим через A появление белого шара при первом извлечении, а через B — при втором. Событие, состоящее в появлении двух белых шаров, является совмещением событий A и B. По формуле (5) имеем

$$P(AB) = P(A)P_A(B)$$

Но $P(A)=3/10$; $PA(B)=2/9$, поскольку после того, как был вынут первый белый шар, в урне осталось 9 шаров, из которых 2 белых. Следовательно,

$$P(AB) = \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9} = \frac{1}{15}$$

3. Теорема сложения вероятностей несовместимых событий

<u>Теорема</u>: Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A)+P(B).$$

<u>Пример</u>. В урне 2 зеленых, 7 красных, 5 коричневых и 10 белых шаров. Какова вероятность появления цветного шара?

<u>Решение</u>: Находим соответственно вероятности появления зеленого, красного и коричневого шаров: *P(зел.)=2/24*; *P(кр.)=7/24*; *P(кор.)=5/24*. Так как рассматриваемые события, очевидно, несовместны, то, применяя аксиому сложения, найдем вероятность появления цветного шара:

$$P(цв.) = P(зел.) + P(кр.) + P(кор.) = \frac{2}{24} + \frac{7}{24} + \frac{5}{24} = \frac{7}{12}$$

<u>Теорема</u>:* *Если A и B – совместные события, то

$$P(A+B) = P(A)+P(B)-P(A\cdot B).$$

Для трех и более совместных событий эта формула значительно усложняется.

Например:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cdot B)-P(A\cdot C)-P(B\cdot C)+P(A\cdot B\cdot C).$$

<u>Пример</u>: Произведен залп из двух орудий по мишени. Вероятность попадания из первого орудия равна 0,85, а из второго – 0,91. Найти вероятность поражения цели.

<u>Решение</u>: Пусть событие A – хотя бы одно попадание в мишень, событие A_1 – попадание в мишень из первого орудия, событие A_2 – попадание в мишень из второго орудия.

Тогда $A = A_1+A_2$.

Поскольку события A_1 и A_2 совместны, то $P(A) = P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cdot A_2)$.

Т.к. события A_1 и A_2 независимы, то $P(A_1\cdot A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)$,

где $P(A_1)=0,85$, а $P(A_2)=0,91$ по условию задачи.

Итак, $P(A) =0,85+0,91-0,85\cdot 0,91=0,9865$.

4. Вероятность противоположного события

Несколько событий в данном опыте образуют <u>полную группу</u>, если в результате опыта обязательно должно появиться хотя бы одно из этих событий, Отсюда следует, что сумма событий полной группы есть достоверное событие, вероятность которого равна единице.

Если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате опыта появится одно и только одно из этих событий.

Для суммы таких событий справедлива формула

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n) = P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n) = 1.$$

<u>Теорема</u>: Два противоположных друг другу события образуют полную группу:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Пример: В партии содержится 20 деталей, среди которых 4 нестандартных. Для контроля взяли наудачу 3 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей нестандартна.

Решение: Пусть событие А – хотя бы одна из взятых деталей окажется нестандартной. Рассмотрим событие $\overline{A}$, противоположное событию А:

$\overline{A}$ - среди взятых деталей нет нестандартных. Вычислим вероятность события $\overline{A}$:

$$P(\overline{A}) = \frac{m}{n} = \frac{C_{16}^{3}}{C_{20}^{3}} = \frac{16! \cdot 3! \cdot 17!}{3! \cdot 13! \cdot 20!} = \frac{28}{57}.$$

Теперь вычислим вероятность искомого события: P(A) = 1- $P(\overline{A}) = 1 - \frac{28}{57} = \frac{29}{57} \approx 0{,}509$.

Пример: Перегорела одна из пяти электроламп, включенных в сеть последовательно. С целью устранения повреждения наудачу выбранную лампочку заменяют годной, после чего сразу проверяется исправность линии. Если повреждение не устранено, то заменяется другая лампочка. Найти вероятность того, что повреждение будет устранено только после замены третьей лампочки.

Решение: Пусть событие А – повреждение будет исправлено после замены третьей лампы.

Рассмотрим следующие три события:

A_1 – первая замененная лампа оказалась перегоревшей;

A_2 – вторая замененная лампа оказалась перегоревшей;

A_3 – третья замененная лампа оказалась перегоревшей.

Тогда: А = $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$

Поскольку события $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}$ и A_3 зависимы, то $P(A) = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2} | \overline{A_1}) \cdot P(A_3 | \overline{A_1} \cdot \overline{A_2})$

Вероятность события $\overline{A_1}$ есть вероятность того, что первая замененная лампа оказалась исправной $P(\overline{A_1}) = \frac{4}{5}$.

Условная вероятность $P(\overline{A_2} | \overline{A_1})$ - вероятность того, что вторая замененная лампа оказалась исправной, если известно, что первая замененная лампа также исправна.

Поэтому $P(\overline{A_2} | \overline{A_1}) = \frac{3}{4}$.

Наконец, условная вероятность $P(\overline{A_3} | \overline{A_1} \cdot \overline{A_2})$ есть вероятность того, что третья замененная лампа оказалась перегоревшей, если известно, что первая и вторая замененные лампы были исправными.

Откуда $P(A_3 | \overline{A_1} \cdot \overline{A_2}) = \frac{1}{3}$.

Теперь подсчитаем искомую вероятность: P(A)= $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = 0{,}2$

Раздел 3. Основы математической статистики

Тема 3.1. Выборочный метод. Статистические оценки параметров распределения

Построение для заданной выборки ее графической диаграммы; расчет по заданной выборке ее числовых характеристик

Цель: получить навыки по построению для заданной выборки ее графической диаграммы; расчету по заданной выборке ее числовых характеристик

Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа

Форма контроля: проверка работы

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

Математическая статистика

План:

1. Основные понятия математической статистики
2. Графическое изображение выборки
3. Точечные оценки параметров распределения

1. Основные понятия математической статистики

На практике функция распределения случайной величины бывает неизвестна и ее определяют по результатам наблюдений или, как говорят, по выборке. ***Выборкой объема n*** для случайной величины называется последовательность независимых наблюдений этой величины, где $x_1, x_2, ..., x_n$ – совокупность значений, принятых независимыми случайными величинами $X_1, X_2, ..., X_n$, имеющими тот же закон распределения $F(x)$, что и величина *X*. В этом случае говорят, что выборка $x_1, x_2, ..., x_n$ взята из ***генеральной совокупности*** величины *X*, а под законом распределения генеральной совокупности понимают закон распределения случайной величины *X*. Значения $x_1, x_2, ..., x_n$ называют выборочными значениями или ***вариантами***. Последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, называется ***вариационным рядом***. Число, указывающее, сколько раз наблюдается данная варианта, называется ***частотой варианты***, а отношение частоты варианты к объему выборки – ***относительной частотой***.

Если $x_1, x_2, ..., x_n$ – вариационный ряд, а *x* – произвольное число, и n_x – количество выборочных значений, меньших *x*, то $\frac{n_x}{n}$ – частота попадания выборочных значений левее точки *x* в данной выбоке объема *n*, т. е. частота события $(X < x)$.

Эта частота является функцией от *x* и называется ***эмпирической функцией распределения* случайной величины *X***, полученной по данной выборке. Если обозначить эту функцию через $F^*(x)$, то по определению

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}.$$

Эмпирическая функция распределения $F^*(x)$ обладает всеми свойствами функции распределения $F(x)$. Так как частота события в *n* независимых опытах является оценкой вероятности этого события, то значение эмпирической функции распределения в точке *x* есть оценка вероятности события $(X < x)$, то есть оценка теоретической функции распределения $F(x)$:

$$F(x) \approx F^*(x).$$

Статистическим рядом распределения называется таблица, которая содержит вариационный ряд и соответствующие частоты или относительные частоты членов этого ряда (табл. 1).

$$\sum_{i=1}^{n} n_i = n,$$

$$w_i = \frac{n_i}{n}, \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

Таблица 1

x_1	x_2	...	x_k
n_1	n_2	...	n_k
w_1	w_2	...	w_k

Таблица 2

$(x_0; x_1)$	$(x_1; x_2)$	...	$(x_{k-1}; x_k)$
n_1	n_2	...	n_k
w_1	w_2	...	w_k

В случае непрерывного распределения величины X статистический ряд распределения представляет собой таблицу, в которой заданы интервалы значений величины X и соответствующие им частоты или относительные частоты, причем интервалы располагаются в порядке возрастания величины X (табл. 2).

Второй случай легко сводится к первому, если в качестве вариант брать середины интервалов:

$$\hat{x}_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \quad i = \overline{1, k}.$$

2. Графическое изображение выборки

Графически табл. 1 изображается ***полигоном частот***, представляющим собой ломаную, отрезки которой соединяют на плоскости соседние точки $(x_i; n_i)$ и $(x_{i+1}; n_{i+1})$ или $(x_i; w_i)$ и $(x_{i+1}; w_{i+1})$, если строится полигон относительных частот.

В случае табл. 2 исходный интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на определенное количество равных интервалов длины $h = x_i - x_{i-1}$. После этого строится ***гистограмма частот*** – ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основания которых равны h, а высоты равны отношению $\frac{n_i}{h}$ (или $\frac{w_i}{h}$ для гистограммы относительных частот).

Гистограмма относительных частот является аналогом функции плотности, так как площадь под ней равна единице. Число интервалов разбиения находят по формуле $k = 1 + 3{,}322 \lg n$, где n – объем выборки. Тогда длина каждого интервала $h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}$, где $x_{\max}$ и $x_{\min}$ – максимальное и минимальное значение выборки соответственно.

3. Точечные оценки параметров распределения

По аналогии с такими числовыми характеристиками случайной величины, как математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение, для выборки $x_1, x_2, ..., x_n$ случайной величины X и для статистического ряда определяются следующие числовые характеристики:

выборочная средняя $$\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i,$$

где k – число вариант и $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$;

выборочная дисперсия $$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \left(x_i - \bar{x}_в\right)^2$$

или $$D_в = \overline{x^2} - \left(\bar{x}_в\right)^2, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2;$$

выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в = \sqrt{D_в}$

Во многих случаях бывает заранее известно, что функция распределения $F(x)$ принадлежит к определенному классу функций распределения, зависящих от одного или нескольких параметров:

$F(x) = F(x, a_1, a_2, ..., a_n)$. *В этом случае определение неизвестной функции распределения сводится к оценке неизвестных параметров по результатам выборки. Следует заметить, что ни при каких* n *нельзя определить по выборке точное значение неизвестного параметра, а можно найти его приближенное значение, которое называется оценкой по выборке неизвестного параметра. Всякая оценка по выборке является функцией* $a^*(x_1, x_2, ..., x_n)$ *от выборочных значений* $x_1, x_2, ..., x_n$, *так как она меняется от выборки к выборке. Функцию* $a^*(x_1, x_2, ..., x_n)$ *подбирают так, чтобы случайная величина* a^* *по возможности более точно аппроксимировала неслучайное неизвестное число* a.

Для выполнения данного условия накладывают следующие требования на оценку: ***несмещенность*** *оценки, ее эффективность и состоятельность. Наиболее часто применяемыми метода получения оценок являются метод моментов и метод максимального правдоподобия.*

Несмещенной и состоятельной оценкой математического ожидания $M(X)$ является выборочная средняя $\overline{x}_в$.

Несмещенная и состоятельная оценка S^2 ***дисперсии*** $D(X)$ вычисляется по формуле:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(x_i - \overline{x}_в\right)^2 = \frac{n}{n-1}D_в.$$

где S^2 – *исправленная дисперсия*.

Для оценки среднего квадратического отклонения σ используется величина S, равная квадратному корню из исправленной дисперсии, которая называется *исправленным средним квадратическим отклонением*.

Рассмотренные оценки характеризуются одним числом и называются ***точечными***.

Пример 1. По заданному статистическому ряду (табл. 1) требуется:

а) построить гистограмму относительных частот;

б) перейти к вариантам и построить полигон относительных частот;

в) построить эмпирическую функцию распределения.

Таблица 1

$x_i - x_{i+1}$	12 –15	15 – 18	18 – 21	21 – 24	24 – 27	27 – 30
n_i	2	6	12	19	7	4

Решение

а) Объем выборки $n = 2 + 6 + 12 + 19 + 7 + 4 = 50$.

Определяем относительные частоты $w_i = \frac{n_i}{n}$ и составляем табл. 2 с относительными частотами:

Таблица 2

$x_i - x_{i+1}$	12 –15	15 – 18	18 – 21	21 – 24	24 – 27	27 – 30
w_i	0,04	0,12	0,24	0,38	0,14	0,08

Для построения гистограммы относительных частот на оси абсцисс откладываются частичные интервалы длины $h = 3$, а над ними проводятся горизонтальные отрезки на расстоянии $y_i = \frac{w_i}{3}$ (рис. 1).

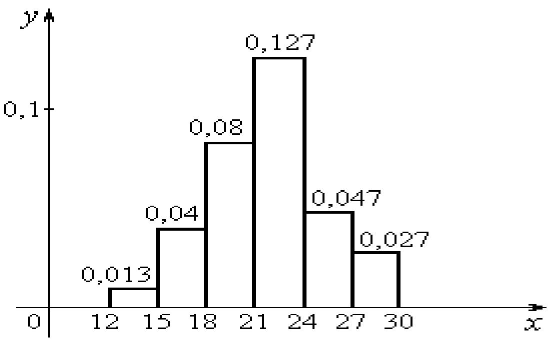

Рис. 1

б) Перейдем к вариантам, положив их равными серединам частичных интервалов $\hat{x}_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$, где x_i, x_{i+1} – концы интервалов. Тогда табл. 2 превратится в табл. 3:

Таблица 3

x_i	13,5	16,5	19,5	22,5	25,5	28,5
w_i	0,04	0,12	0,24	0,38	0,14	0,08

Отметим на плоскости точки (x_i, w_i), $\left(i = \overline{1, 6}\right)$ и, соединив соседние точки, получим полигон относительных частот (рис. 2).

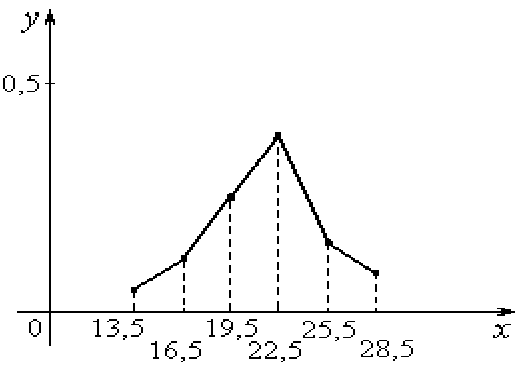

Рис. 2

в) Эмпирическая функция распределения $F^*(x)$ строится по закону:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 \quad \textit{при} \quad x \le x_1, \\ \sum\limits_{i=1}^{l} w_i \ \textit{при} \ x_l < x \le x_{l+1} \ (l = 1, 2, ..., k-1), \\ 1 \qquad \textit{при} \quad x > x_k. \end{cases}$$

В нашем случае получаем:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \qquad x \le 13{,}5, \\ 0{,}04 & \textit{при} \quad 13{,}5 < x \le 16{,}5, \\ 0{,}16 & \textit{при} \quad 16{,}5 < x \le 19{,}5, \\ 0{,}40 & \textit{при} \quad 19{,}5 < x \le 22{,}5, \\ 0{,}78 & \textit{при} \quad 22{,}5 < x \le 25{,}5, \\ 0{,}92 & \textit{при} \quad 25{,}5 < x \le 28{,}5, \\ 1 & \textit{при} \qquad x > 28{,}5. \end{cases}$$

График функции $F^*(x)$ представлен на рис. 3.

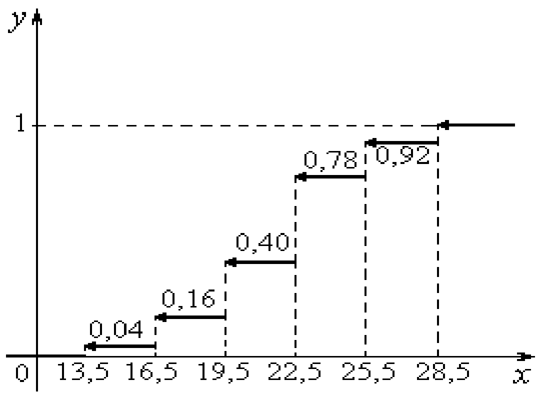

Рис. 3

Пример 2. В условиях примера 1 найти статистические оценки.

Решение Обратимся к табл. 3: $\overline{x}_{в} = 21{,}6$; $D_{в}(x) = 13{,}05$; $\sigma_{в}(x) = 3{,}6$.

Варианты заданий

Подготовка сообщения «Династия Бернулли»

Подготовка сообщения «Практические приложения теории вероятностей»

Подготовка сообщения «Возникновение математической статистики»

Подготовка сообщения «Практические приложения математической статистики»

Проработка конспекта. Повторение правил.

Упражнения к главе XI. «Проверь себя». №№ 1097 – 1109.

Упражнения к главе XII. «Проверь себя». №№ 1160 – 1180 №№ 1189 - 1192

Задача 1. Сколькими различными маршрутами можно разнести корреспонденцию в пять адресов. (Маршрут определяется последовательностью адресатов)?

Задача 2. Цифры 0,1,2,3 написаны на четырех разноцветных карточках. Сколько различных четырехзначных чисел можно сложить из этих карточек?

Замечание. Первая цифра числа не может быть нулем. Карточку можно использовать в числе только один раз.

Задача 3. В хоккейном турнире участвуют 6 команд. Каждая команда должна сыграет с каждой одну игру. Сколько игр сыграно в турнире?

Задача 4. Из трех классов спортивной школы нужно составить команду для соревнований, взяв по одному ученику от класса. Сколько различных команд можно составить, если в одном классе учатся 18, в другом 20, в третьем 22 ученика?

Задача 5. На плоскости задано множество A, состоящее из 8 точек. Три из них выкрашены в красный цвет и лежат на одной прямой, а остальные расположены так, что проходящая через пару точек прямая не содержит других точек множества. Через каждые две точки множества A проведено по прямой линии. Сколько всего прямых линий получилось?

Задача 6. Сколькими способами можно упорядочить множество $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ так чтобы каждое четное число имело четный номер?

Задача 7. В ящике находится 20 деталей. Известно, что 5 из них являются стандартными. Из этих деталей выбирают 3. Сколько существует способов выбора трех деталей таких, чтобы среди них была, по крайней мере, одна стандартная?

Задача 8. Из 7 разноцветных карточек разрезной азбуки составлено слово *колокол***.** Ребенок, не умеющий читать, случайно рассыпал эти карточки. Сколькими способами из этих карточек он сможет снова составить слово *колокол***?**

Задача 9. Имеется прямоугольник, разбитый на клетки. По горизонтали n клеток, а по вертикали– m клеток. Можно двигаться только по сторонам клеток либо вправо, либо вверх. Сколько существует различных путей из левого нижнего угла в правый верхний угол?

Решить задачи

1. Из ящика, в котором 10 белых и 6 черных шаров, берут наудачу 3 шара. Какова вероятность того, что один из них белый, а два черных?
2. Набирая номер телефона, абонент забыл три последние цифры, запомнив лишь, что они различные, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры?
3. 25 экзаменационных билетов содержат по две вопроса, которые не повторяются. Студент подготовил 45 вопросов. Какова вероятность того, что вытянутый студентом билет состоит из подготовленных им вопросов?
4. В мастерскую для ремонта поступило 15 телевизоров. Известно, что 6 из них нуждаются в общей регулировке. Мастер берет первые попавшиеся 5 телевизоров. Какова вероятность того, что 2 из них нуждаются в общей регулировке.
5. Из колоды в 52 карты берется наугад 4 карты. Найти вероятность того, что среди этих 4 карт будут представлены все четыре масти.
6. На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди них находится трехтомник А.С.Пушкина. Некто взял наудачу с полки 5 книг. Найти вероятность того, что среди этих пяти книг есть трехтомник Пушкина.
7. Секретных замок содержит на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 5 секторов с различными цифрами. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, что образуют определенное число. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок откроется.

Теорема умножения вероятностей

1. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадает в мишень, равна p = 0,9. Стрелок произвел 3 выстрела. Найти вероятность того, что все 3 выстрела дали попадание. *Отв.* 0,729.
2. Брошены монета и игральная кость. Найти вероятность совмещения событий: "появился "герб", "появилось 6 очков". *Отв.* 1 / 12.
3. В двух ящиках находятся детали: в первом — 10 (из них 3 стандартных), во втором — 15 (из них 6 стандартных). Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными. *Отв.* 0,12.
4. В студии телевидения 3 телевизионных камеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна *p* = 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включена хотя бы одна камера (событие А). *Отв.* 0,936.
5. Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей (событие А)? *Отв.* 91 / 216.

Теорема сложения вероятностей

1. В денежно-вещевой лотерее на каждые 10000 билетов разыгрывается 150 вещевых и 50 денежных выигрышей. Чему равна вероятность выигрыша, безразлично денежного или вещевого, для владельца одного лотерейного билета? *Отв.* p = 0,02.
2. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет 10 очков, равна 0,1; вероятность выбить 9 очков равна 0,3; вероятность выбить 8 или меньше очков равна 0,6. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее 9 очкоь. *Отв.* p = 0,4.
3. В партии из 10 деталей 8 стандартных. Найти вероятпость того, что среди наудачу извлеченных 2 деталей есть хотя бы одна стандартная. *Отв.* p = 44 / 45.
4. В ящике 10 деталей, среди которых 2 нестандартных. Найти вероятность того, что в наудачу отобранных 6 деталях окажется не более одной нестандартной детали. *Отв.* p = 2 / 3. Указание. Если А — нет ни одной нестандартной детали, В — есть одна нестандартная деталь, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = C^6_8 / C^6_{10} + C^1_2 * C^5_8 / C^6_{10}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данное пособие разработано в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «математика» для студентов техникума.

Повторение базовых понятий школьного курса способствует усвоению в дальнейшем нового материала. Кроме того, выполнению практических заданий, даёт понимание о имеющихся «пробелах в знаниях».

В результате повторения студент должен

знать:

· правило произведения; перестановки; размещения; сочетания;

· виды событий; комбинации событий; вероятность событий; сложение, умножение вероятностей; независимые события;

· статистическая вероятность; случайные величины; меры разброса.

уметь:

· решать элементарные комбинаторные задачи;

· решение задач по теории вероятности;

· собирать , представлять, анализировать информацию о различных случайных величинах.

Список литературы и источников

1. Алгебра: сб. заданий для подготовки к гос. итоговой аттестации в 9 кл. /[*Л.В. Кузнецова, С.Б. Суворова, Е.А. Бунивович и др*.]. – 4-е изд., перераб. – М.: Просвещение, 2013.
2. Геометрия: сб. заданий для проведения экзамена в 9 кл. / *А.Д. Блинков, Т.М. Мищенко*. – М.: Просвещение, 2006.
3. Математика. 9-й класс. Подготовка к ГИА – 2014: Тренировочные задания / Под ред. *Т.А.Корешковой, В.В.Мирошина, Н.В.Шевелевой*. – М.: Эксмо, 2011
4. Математика. 9-й класс. Подготовка к ГИА – 2012. Тематические тесты: учебно-методическое пособие / Под ред. *Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова*. – Ростов-на-Дону: Легион-М, 2011.
5. Алгебра. 9-й класс. Типовые тестовые задания. / Сост. *А.Н.Рурукин*.-М.: ВАКО, 2011.
6. Электронные ресурсы: открытый банк заданий по математике, телекоммуникационная система СтатГрад.

Литература для студентов:

1. *Семенов А.Л., Ященко И.В.* ЕГЭ 2014. Математика. Типовые тестовые задания. М: Издательство «Экзамен», 2014.

2.*Семенов А.Л.* и др. ЕГЭ. 3000 задач с ответами по математике. Все задания группы В М: Издательство «Экзамен», 2014

3. *Высоцкий И.Р, Гущин Д.Д, Захаров П.И.* и др. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ: 2014. Математика. М.: Издательство «Экзамен», 2014

4. ЕГЭ 2014. Математика. Типовые тестовые задания. Под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. М.: Издательство «Экзамен», 2012

Источники информации для дополнительного изучения математики студентами

1. Сборник задач по математике для поступающих в ВУЗы. Под редакцией М.И. Сканави, 9-е изд., перераб. И доп. – М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век»: Мир и образование, 2008г.

2. *В.С. Крамор*. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1993г.

3. Современный учебно-методический комплекс. Алгебра 10-11. Версия для школьника. Просвещение (все задачи школьной математики).

Предметные Интернет-ресурсы, цифровые образовательные ресурсы

http://window.edu.ru – Единое окно доступа к образовательным ресурсам

http://matclub.ru - Высшая математика, лекции, курсовые, примеры решения задач, интегралы и производные, дифференцирование, производная и первообразная, ТФКП, электронные учебники

http://www.mat.september.ru - Газета «Математика» «издательского дома» «Первое сентября»

http://www.mathematics.ru - Математика в Открытом колледже

http ://www. exponenta.ru - Образовательный математический сайт

http://www.mathnet.ru - Общероссийский математический портал Math-Net.Ru

http ://www. alhnath.ru - Портал Alhnath.ni - вся математика в одном месте

http ://www.bvmath.net - Вся элементарная математика: Средняя математическая интернет – школа.